KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

vježbe 2017/18

SLUČAJNE PROMJENLJIVE

1. Definicija, diskretne i kontinualne promjenljive
2. Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive
3. Gustina (raspodjele) vjerovatnoće
4. Matematičko očekivanje, varijansa, koeficijent varijacije

V3

Zadatak 1.
Cilj se gađa sa 4 metka. Neka je X slučajna promjenljiva koja označava broj pogodaka i ako je u svakom gađanju vjerovatnoća pogotka cilja 0,5 naći:
a) **raspodjelu vjerovatnoća slučajne promjenljive X**
b) funkciju raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X
c) matematičko očekivanje, modu i medijanu,
d) varijansu i koeficijent varijacije

RJEŠENJE

- Broj pogodaka može biti: 0,1,2, 3 ili 4, pa je X={0,1,2,3,4}- skup vrijednosti slučajne promjenljive X (konačan niz brojeva)
- *Uređena r-torka elemenata (4 gadjanja), n-članog skupa S {0=promasaj, 1=pogodak}, ali tako da se elementi mogu i ponavljati (r može biti i veće od n) zove se* ***varijacija s ponavljanjem r-tog razreda od n elemenata****.*

$$Vsa\ ponavljanjem_n^{(r)} = n^r = 2^4 = 16\ mogucih\ ishoda$$

a) Raspodjela vjerovatnoća slučajne promjenljive X data u tabeli:,

Broj pogodaka (x_k)	0	1	2	3	4
Vjerovatnoća	1/16	4/16	**6/16**	4/16	1/16

b) funkcija raspodjele vjerovatnoće

$$F(X) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & za\ x \le 0 \\ \frac{1}{16} za\ 0 < x \le 1 \\ \frac{5}{16} za\ 1 < x \le 2 \\ \frac{11}{16} za\ 2 < x \le 3 \\ \frac{15}{16} za\ 3 < x \le 4 \\ 1 & za\ x > 4 \end{cases}$$

Zadatak 1.
nastavak
c) **matematičko očekivanje, modu i medijanu,**
d) varijansu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije

RJEŠENJE

c) matematičko očekivanje:

$$\boldsymbol{\mu = M(X)} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots . + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = \mathbf{2}$$

- **medijana Me** je vrijednost slučajne promjenljive X za koju vjerovatnoća da slučajna promjenljiva uzme vrijednost manju od Me iznosi 0,5, odnosno P(X<x)=0,5, odnosno ona koja (s obzirom na diskretnu prirodu slučajne promjenljive) zadovoljava uslov, da postoji x_k tako:

  $P(X < x_k) \leq 1/\ 2 \leq P(X \leq x_k)$, x_k=Me

  Prema kumulativnoj funkciji raspodjele vjerovatnoće F(X) koju smo definisali u prethodnom dijelu zadatka je za:

  P(X<2)=5/16<0,5, a za za P(X<=2)=P(X<3)=11/16>0,5, pa je medijana Me=2

- **moda (Mo)** je najvjerovatnija vrijednost slučajne promjenljive X , odnosno pi=max, Mo=2. P(X=Mo)=6/16

b) varijansa V(X) ili $\boldsymbol{\sigma_x^2}$, odnosno disperzija D(X) je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive X od matematičkog očekivanja M(X), od

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{n} [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k \text{ , za diskretnu promjenljivu}$$

$$V(X) = M[X-2]^2 = (0-2)^2 \cdot 1/16 + (1-2)^2 \cdot 4/16 + (2-2)^2 \cdot 6/16 + (3-2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{16}$$

=4/16+4/16+0/16+4/16+4/16=1

- **standardno odstupanje (standardna devijacija)** $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{V}(X) = \sqrt{1}}$ **=1**

- **koeficijent** varijacije je relativna mjera rasturanja $k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{1}{2}$=0,5

Zadatak 2.
Novčic se baca do pojave grba, a sa X označimo broj bacanja novčića (uključujući i bacanje kada se pojavio grb). Naći za slučajnu promjenljivu X
a) zakon raspodjele vjerovatnoća
b) matematičko očekivanje

RJEŠENJE
Prostor elementarnih događaja je beskonačan, ali prebrojiv skupom prirodnih brojeva, pa slučajna promjenljiva X∊{1,2,3....}.
Vjerovatnoća pojave grba u svakom bacanju, jednaka je vjerovatnoći pojave pisma i iznosi 0,5.
Pojava pisma i grba su nezavisni događaji, jer je P(AB)=P(A)·P(B)

P(X=1)=1/2 (u prvom bacanju se pojavio grb)

P(X=2)=(1-1/2)1/2=1/2-1/4=1/4 (u drugom se pojavio grb, a u prvom se nije pojavio grb)

P(X=3)=(1-1/2)(1-1/2)1/2=(1-1/2-1/2+1/4)1/2=1/8..... (u trećem se pojavio grb, a u prvom i drugom se nije pojavio grb)

a) zakon raspodjele vjerovatnoće:

$P(X = x) = \frac{1}{2^x}$ x=1,2,3...., pri čemu mora biti i

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots . = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

suma beskonacnog geometrijskog reda oblika S=a+ar+ar2+ar3+ar4+...=a/(1-r)

Posmatrajmo geometrijski red: S=1+2/3+4/9+8/27+....
dva uzastopna clana reda (naredni/posmatrani)=2/3.
Ako sa 2/3 pomnozimo cijeli red ovim brojem, onda re postaje: 2/3*S=2/3+4/9+8/27+....,
razlikuje se od prvog samo što mu nedostaje prvi član

Oduzimanjem ova dva reda poništavaju se svi članovi osim prvog: S-2/3*S=1,
odnosno S(1-2/3)=1, pa je suma ovog reda S=1/(1-2/3)

Uopstavajuci, mozemo reci da je suma beskonacnog geometrijskog reda oblika
S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+...=a/(1-r)

vise na https://bs.wikipedia.org/wiki/Geometrijski_red

Zadatak 2. nastavak
b) matematičko očekivanje

RJEŠENJE

Prostor elementarnih događaja je beskonačan, ali prebrojiv skupom prirodnih brojeva, pa slučajna promjenljiva Xϵ{1,2,3....}.
Vjerovatnoća pojave grba u svakom bacanju, jednaka je vjerovatnoći pojave pisma i iznosi 0,5.
Pojava pisma i grba su nezavisni događaji, jer je P(AB)=P(A)·P(B)
P(X=1)=1/2 (u prvom bacanju se pojavio grb)
P(X=2)=(1-1/2)1/2=1/2-1/4=1/4 (u drugom se pojavio grb, a u prvom se nije pojavio grb)
P(X=3)=(1-1/2)(1-1/2)1/2=(1-1/2-1/2+1/4)1/2=1/8..... (u trećem se pojavio grb, a u prvom i drugom se nije pojavio grb)

b) matematičko očekivanje:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots . + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + ... + \text{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}}$$

uporedimo ga sa geometrijskim redom koji konvergira i čija je suma 1/(1-a): $S1 = 1 + a + a^2 + \cdots . + a^n = \frac{1}{(1-a)}$
Posmatrajmo red koji se dobija njegovim diferenciranjem (i lijevu i desnu stranu diferenciramo)

$$S2=0+1+2a+3a^2+4a^3+...=1/(1-a)^2$$

Od reda S2 oduzmimo red S1: $0+1-1+2a-a+3a^2-a^2+4a^3-a^3+....=a+2a^2+3a^3+4a^4+......=\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{(1-a)} = \frac{1-1+a}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}$
ako uvedemo smjenu a=1/2, dobijamo red koji odgovara našem redu za proračun matematičkog očekivanja, pa je :

$$M(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Posmatrajmo geometrijski red: S=1+2/3+4/9+8/27+....
dva uzastopna clana reda (naredni/posmatrani)=2/3.
Ako sa 2/3 pomnozimo cijeli red ovim brojem, onda re postaje: 2/3*S=2/3+4/9+8/27+....,
razlikuje se od prvog samo što mu nedostaje prvi član

Oduzimanjem ova dva reda poništavaju se svi članovi osim prvog: S-2/3*S=1,
odnosno S(1-2/3)=1, pa je suma ovog reda S=1/(1-2/3)

Uopstavajuci, mozemo reci da je suma beskonacnog geometrijskog reda oblika
S=a+ar+ar^2*+ar*^{3}*+ar*^{4}*+...=a/(1-r)*

vise na https://bs.wikipedia.org/wiki/Geometrijski_red

Zadatak 3.

iz partije od 100 proizvoda od kojih su 10% škart, izabran je na slučajan način uzorak od 5 proizvoda. Ako sa X označimo broj škartova u uzorku, naći :

a) zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X

b) matematičko očekivanje slučajne promjenljive X,

c) varijansu i standardno odstupanje slučajne promjenljive X

RJEŠENJE

- Eksperiment je izbor r=5 elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n=100 elemenata, elementarni događaj je grupa od 5 proizvoda – nije važan redosled, pa se radi o podskupu od 5 proizvoda, a ne o uredjenoj 5-orki (broj kombinacija bez ponavljanja). Ovakvih se podskupova na slučajan način može izabrati:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{100!}{5!\,95!} = 75287520$$

- Broj škartova može biti: 0,1,2, 3 , 4 ili 5, pa je X={0,1,2,3,4,5}- skup vrijednosti slučajne promjenjive X (konačan niz brojeva).
- Događaj A: „uzorak ima *k* neispravnih proizvoda" **(onda u uzorku ima i r-k=5-k** ispravnih)
- ukupno ispravnih proizvoda ima 100*90%=90, a ukupno neispravnih ima 10. U uzorku ovih *k* neispravnih potiče od neispravnih proizvoda, a oni se mogu izabrati od 10 neispravnih na $\binom{10}{k}$ načina (broj kombinacija bez ponavljanja)
- ispravni proizvodi u uzorku potiču od ukupno 90 ispravnih proizvoda. Ova grupa od *(5-k)* ispravna proizvoda se može odabrati na $\binom{90}{5-k}$ načina.
- Dakle ukupno se *k* neispravnih i *5-k* ispravnih proizvoda mogu izabrati na $\binom{10}{k}.\binom{90}{5-k}$ načina.

a) zakon raspodjele vjerovatnoće

- Po klasičnoj definiciji je vjerovatnoća da se desi događaj A, odnosno da slučajna promjenljiva X uzme vrijednost x_k, je :

$$P(X = x_k) = \frac{\binom{10}{k}\cdot\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}},$$

odnosno p0=0,583, p1=0,340, p2=0,070, p3=0,007, p4=0, p5=0

Zadatak 3.
nastavak
b) matematičko očekivanje slučajne promjenljive X,
c) varijansu i
d) standardno odstupanje slučajne promjenljive X
e) koeficijent varijacije

RJEŠENJE

c) matematičko očekivanje:

$\mu = M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots . + x_n \cdot p_n = 0 \cdot 0{,}583 + 1 \cdot 0{,}340 + 2 \cdot 0{,}070 + 3 \cdot 0{,}007 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0$ =0,501

b) varijansa V(X) ili σ_x^2 , odnosno disperzija D(X) je matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promjenljive X od matematičkog očekivanja M(X), od

$V(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$, za diskretnu promjenljivu

$$V(X) = M[X - M(X)]^2 = (0 - 0{,}501)^2 \cdot 0{,}583 + (1 - 0{,}501)^2 \cdot 0{,}340 + (2 - 0{,}501)^2 \cdot 0{,}070 + (3 - 0{,}501)^2 \cdot 0{,}007 + (4 - 0{,}501)^2 \cdot 0 + (5 - 0{,}501)^2 \cdot 0 = 0{,}1463 + 0{,}0847 + 0{,}1573 + 0{,}0437 = 0{,}432$$

c) standardno odstupanje (standardna devijacija) $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,432} = 0,6573}$

d) koeficijent varijacije:

$$k_v = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% = \frac{0{,}6573}{0{,}501} = 1{,}3119$$

Zadatak 4.

Dvije mašine proizvode jednake proizvode. Raspodjela vjerovatnoća škartova, koji se u toku jedne smjene pojave na prvoj, odnosno drugoj mašini su dati u tabeli.

a) Formirati raspodjelu vjerovatnoća broja škartova koji se pojave na obje mašine u toku jedne smjene (slučajna promjenljiva Z)

b) Naći matematičko očekivanje i varijansu za slučajnu promjenljivu Z

Za prvu mašinu					**Za drugu mašinu**			
Br. skartova (X)	0	1	2	3	Br. skartova (Y)	0	1	2
vjerovatnoće	0,1	0,6	0,2	0,1	vjerovatnoće	0,5	0,3	0,2

RJEŠENJE

a) **Z**:slučajna promjenljiva koja odgovara broju skartova koji se pojavi na obje mašine, Z=X+Y, a ova slučajna promjenljiva Z može da uzme vrijednosti (0,1,2,3,4,5)

- ako su promjenljive X i Y nezavisne onda važi:
- P(Z=0)=P(X=0, Y=0)=P(X=0)*P(Y=0)=0,1*0,5=0,05
- P(Z=1)=P(X=0, Y=1)+P(X=1,Y=0)=P(X=0)*P(Y=1)+P(X=1)*P(Y=0)=0,1*0,3+0,6*0,5=0,33
- P(Z=2)=P(X=0, Y=2)+P(X=2,Y=0)+P(X=1,Y=1)=P(X=0)*P(Y=2)+P(X=2)*P(Y=0) +P(X=1)*P(Y=1)= =0,1*0,2+0,2*0,5+0,6*0,3=0,3
- P(Z=3)=P(X=3,Y=0)+P(X=1,Y=2) +P(X=2,Y=1)= P(X=3)*P(Y=0) +P(X=1)*P(Y=2)+P(X=2)*P(Y=1) =0,1*0,5+0,6*0,2+0,2*0,3=0,23
- P(Z=4)=P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1) = P(X=2)*P(Y=2) +P(X=3)*P(Y=1)=0,2*0,2+0,1*0,3=0,07
- P(Z=5)=P(X=3,Y=2) = P(X=3)*P(Y=2)=0,1*0,2=0,02
- X i Y jesu nezavisne i P(Z)=1

Za obje mašine ukupno						
Br. skartova (X)	0	1	2	3	4	5
vjerovatnoće	0,050	0,330	0,300	0,230	0,070	0,020

Zadatak 4.
nastavak

Za prvu mašinu					**Za drugu mašinu**			
Br. skartova (X)	0	1	2	3	Br. skartova (Y)	0	1	2
vjerovatnoće	0,1	0,6	0,2	0,1	vjerovatnoće	0,5	0,3	0,2

RJEŠENJE

b) matematičko očekivanje; matematičko očekivanje zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednako je zbiru njihovih matematičkih očekivanja

M(Z)=M(X+Y)= M(X)+M(Y)

M(X)=0*0,1+1*0,6+2*0,2+3*0,1=1,3 M(Y)=0*0,5+1*0,3+2*0,2=0,7

M(Z)=1,3+0,7=2

Moze se provjeriti i ako se direktno racuna matematicko ocekivanje za promjenljivu Z, na osnovu njene raspodjele vjerovatnoće

c) varijansa zbira slučajnih promjenljivih X i Y jednaka je zbiru njihovih varijansi

V(X)=$\sum_{k=1}^{n}[x_k - M(X)]^2 \cdot p_k$

V(X+Y)= V(X)+V(Y)

V(X)=(0-1,3) ^{2}*0,1+(1-1,3) ^{2}*0,6+(2-1,3) ^{2}*0,2+(3-1,3)^2*0,1=0,61

V(Y)=(0-0,7)^2*0,5+(1-0,7)^2*0,3+(2-0,7)^2*0,2=0,61

V(Z)=0,61+0,61=1,22

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- http://www.e-statistika.rs
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf